Fréchet, M.

PRI LA FUNKCIA EKVACIO $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Persistenter Link: http://dx.doi.org/10.5169/seals-14871

L'Enseignement Mathématique, Vol.15 (1913)

PDF erstellt am: 08-Dec-2010

PRI LA FUNKCIA EKVACIO

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

---

1. — Jam de longe, Cauchy pruvis ke *kontinua* funkcio $f(x)$ kiu verigas la funkcian ekvacion

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

kiuj ajn estu la nombroj x, y, necese estas homogena, unuagrada funkcio $f(x) \equiv Ax$.

Poste, oni pruvis la saman teoremon, farinte hipotezojn pli larĝajn ol la kontinueco de $f(x)$ [1]. Ekzemple, S^ro^ Darboux nur supozis ke $f(x)$ havas superrandon sur finita segmento.

2. — Nun mi intencas *pruvi la saman teoremon, nur supozante ke* f(x) *estas analitike esprimebla sur iu finita segmento*. Tio signifas, laŭ Sro Lebesgue, ke ĝi povas esti konstruata per finita nombro aŭ komputebla aro da adicioj, multiplikoj, allimiradoj faritaj sinsekve laŭ difinita leĝo, komence per la varianto kaj konstantoj. Tiu nocio estas ĝeneralega [2].

Mi utilos la econ, montratan de Sro Lebesgue [3], ke ĉiu analitike esprimebla funkcio $f(x)$ estas « mezurebla », t.e. ke la punktoj kie $a \leqq f(x) < b$, formas aron mezureblan kiuj ajn estu la nombroj a, b. Aliparte, aro E da punktoj sur (a, b) estas mezurebla, kiam $b - a$ estas la sumo de la malsuperrando (nomata mezuro de E) de la tuta longeco de aro de segmentoj entenantaj E, kaj de la simila nombro kiu koncernas la aron de la punktoj de (a, b) kiuj ne apartenas al E.

3. — Do, ni nur supozas nun ke $f(x)$ estas mezurebla funkcio sur (a, b), kiu ĉie verigas la funkcian ekvacion

$$f(x) = f(x) + f(y) \ . \qquad (1)$$

---

[1] Vidu ekzemple S. Pincherle, *Calcul fonctionnel*, Encyclopédie des Sciences mathématiques, éd. franç.

[2] Ekzemple, la funkcio kiu estas nula kiam la varianto estas racionala, kaj egalas unu alie, estas analitike esprimebla, egalante

$$\lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} (\cos m\,!\, x)^{2n} \right] .$$

[3] H. Lebesgue. *Sur les fonctions représentables analytiquement*. Journal de Mathématiques, 1908.

Oni tuj vidas, ke $f(0) = 0$, kaj, per klasika metodo ke

(2) $$f(rx) = rf(x)$$

kiam r estas racionala nombro ($> 0, < 0, = 0$). Nun se $f(x)$ ne estas la evidenta solvo $f(x) \equiv 0$ de (1), ekzistas certe nombro $c \not\equiv 0$, tia ke $f(c) \not\equiv 0$. Oni do havas

$$f(x) = \frac{x}{c} f(c)$$

kiam $\frac{x}{c}$ estas racionala. Se ni skribas $X = \frac{x}{c}$, $A = \frac{f(c)}{c}$ la funkcio

$$F(X) = f(cX) - Xf(c) = f(x) - Ax$$

estas evidente funkcio mezurebla, kiu verigas la funkcian ekvacion

$$F(X + Y) = F(X) + F(Y)$$

kiel $f(x)$, *sed kiu estas nula kiam* X *estas racionala.*

La teoremo estos pruvita kiam mi estos montrinta ke F(X) estas ĉie nula.

4. — En kontraŭa okazo, kiam ekzistus nombro $X_0 \not\equiv 0$, por kiu $F(X_0) \not\equiv 0$, ni rimarkigos unue, ke en tre mallonga segmento, F(X) alproksimiĝas al iu ajn nombro. Pli precize, estu k iu nombro, kaj estu ε, η du nombroj pozitivaj: ekzistas certe nombro X tia ke, ekzemple

(3) $$0 < X < \eta, \qquad k - \varepsilon < F(X) < k .$$

Fakte, ni povas elekti racionalan nombron r tiel ke

$$k - \varepsilon < r \,.\, F(X_0) < k .$$

Poste; ni povas elekti racionalan nombron r', por kiu

(5) $$-rX_0 < r' < -rX_0 + \eta .$$

Nun

$$F(r' + rX_0) = F(r') + F(rX_0) = rF(X_0) .$$

Kaj sufiĉas preni $X = r' + rX_0$ por ricevi (3) [1].

5. — Ni nun uzu la hipotezon ke F(X) estas mezurebla en (a, b). La aro $E_{\alpha,\beta}$ kie, en (a, b), $\alpha \leq F(X) < \beta$ havas do mezuron, ni nomu ĝin $mE_{\alpha,\beta}$. Ni estas tuj montronte ke

(6) $$E_{n,\,n+1} = E_{p,\,p+1} ,$$

kiuj ajn estu n, p.

---

[1] Samtempe la malegalecoj (3) pruvas ke, se, laŭ la hipotezo de S^ro^ Darboux, $f(x)$ — mezurebla au ne — havas randojn finitajn, $F(X) \equiv 0$, do $f(x) \equiv Ax$.

Tio sufiĉos por pruvi la teoremon, ĉar, ĉiu punkto de (a, b) apartenas al unu el la aroj $E_{n,n+1}$ kie n estas entjero, kaj sekve

$$b - a = (mE_{0,1} + mE_{-1,0}) + (mE_{1,2} + mE_{-2,-1}) + \dots$$
$$+ (mE_{n,n+1} + mE_{-n-1,-n}) + \dots .$$

Sed, ĉar ĉiuj parentezoj estas egalaj, laŭ (6), la dekstra membro do, ne povus konverĝi al $(b - a)$.

6. — Por ricevi (6), ni rimarku, ke laŭ (3), kiu ajn estu la entjero $q > 0$, oni povas trovi X_q tiel ke

$$0 < X_q < \frac{1}{q}, \qquad p - n - \frac{1}{q} < F(X_q) < p - n .$$

Kiam X_q ne sanĝas, kaj, aliparte, X trakuras $E_{n,n+1}$, la punktoj $Y = X + X_q$ trakuras aron mezureblan G sur kiu

$$a < Y < b + \frac{1}{q} \qquad p - \frac{1}{q} < F(X) < p + 1 .$$

Ni nomu H, K, la aroj de la punktoj de G sur kiuj

$$a < Y < b ; \qquad b \leqq Y \leqq b + \frac{1}{q} .$$

La unua estas parto de la mezurebla aro $E_{p-\frac{1}{q},p+1}$, la dua estas parto de la segmento $\left(b, b + \frac{1}{q}\right)$. Do

$$mE_{n,n+1} = mG \leqq mE_{p-\frac{1}{q},p+1} + \frac{1}{q}$$

aŭ

$$mE_{n,n+1} - mE_{p,p+1} \leqq mE_{p-\frac{1}{q},p} + \frac{1}{q} . \tag{7}$$

La nombroj n, p ne dependas de q. Kiam q kreskas senfine, la dua membro de (7) konverĝas ankaŭ al nulo [1]. Do,

$$mE_{n,n+1} \leqq mE_{p,p+1} .$$

---

[1] Ni skribis ke $E_{p-\frac{1}{q},p}$ konverĝas al nulo kun $\frac{1}{q}$, ĉar $E_{p-\frac{1}{2},p}$ estas sumo de

$$E_{p-\frac{1}{2},p-\frac{1}{3}}, \; E_{p-\frac{1}{3},p-\frac{1}{4}}, \dots E_{p-\frac{1}{q},p-\frac{1}{q+1}}, \dots$$

do la rajo

$$mE_{p-\frac{1}{2},p-\frac{1}{3}} + mE_{p-\frac{1}{3},p-\frac{1}{4}} + \dots + mE_{p-\frac{1}{q},p-\frac{1}{q+1}}, \dots$$

konverĝas kaj la resto $E_{p-\frac{1}{q},p}$ de la rajo devas konverĝi al nulo kun $\frac{1}{q}$.

Same

$$mE_{p,\,p+1} \leq mE_{n,\,n+1}$$

fine

$$mE_{p,\,p+1} = mE_{n,\,n+1}\,.$$

7. — Mi jam alie pruvis[1], ke la kontinuaj funkcioj kiuj verigas la funkcian ekvacion

$$(8) \qquad f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) - \sum_1 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}) +$$
$$\sum_2 f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{n-1}}) + \dots + (-1)^{n+1} f(0) = 0$$

estas n-gradaj polinomoj, — kaj reciproke[2]. La pruvo stariĝis sur la teoremo de Cauchy pri la funkcia ekvacio (1). Oni nun vidas ke la teoremo, supre citita, koncerne (8), estos ankoraŭ vera kiam oni ne plu supozas ke $f(x)$ estas kontinua, sed ke ĝi estas mezurebla — aŭ analitike esprimebla — en iu segmento eĉ tre malgranda, aŭ ankaŭ, ke ĝi estas randebla en tiu-ĉi segmento.

M. Fréchet (Poitiers).

[1] Une définition fonctionnelle des Polynômes (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1909, 4i série, t. IX).

[2] La skribsigno $\sum_p$ signifas la sumon de ĉiuj $f(x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p})$ kie $i_1, i_2, \dots i_p$ estas ia kombinaĵo el la nombroj $1, 2, \dots, n+1$.